L.B. Monastir	Devoir de Synthèse n : 1	3 ème Math
Durée : 120 minutes		06 / 12/ 2010

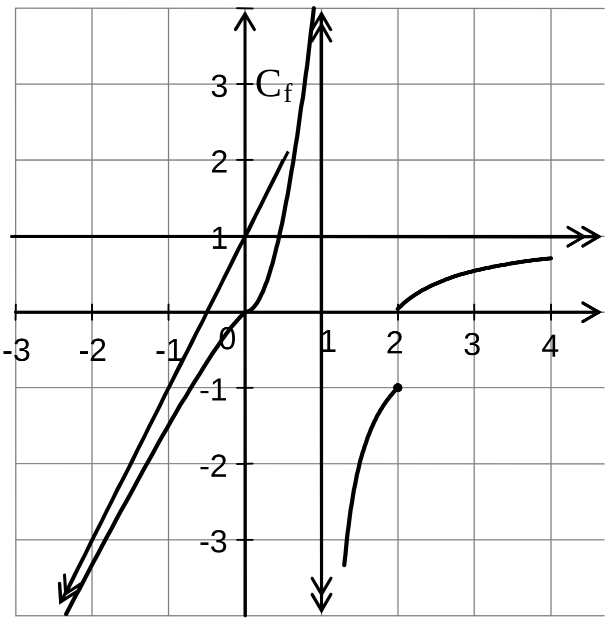
Prof : Ben Afia Moez , Hergli Riadh et Ali Zouhaier

Exercice 1 (3 points)

L'élève doit remplir et remèttre la feulle ci-jointe.

Exercice 2 (4 points)

On donne la figure ci-dessous dans laquelle on a tracé la courbe représentative d'une fonction f :



A l'aide d'une lecture graphique répender aux questions suivantes :

1/ Déterminer D_f le domaine de définition de f . **0,5**

2/ Déterminer les limites aux bornes de D_f. **1,00**

3/ Etudier la continuité de f sur son domaine de définition D_f. **0,75**

4/ Déterminer $f(]-\infty, 1[)$. **0,75**

5/ Déterminer les équations des asymptotes à C_f. **1,00**

Exercice 3 (5 points)

Soit $f : x \to \begin{cases} \sqrt{x^2+3} - m & \text{si } x \geq -1 \\ \dfrac{-2x^2+3x+5}{x+3} & \text{si } x < -1 \end{cases}$ m étant un paramètre réel.

C_f est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé R du plan.

1/ Déterminer le domaine de définition de f. **0,5**

2/ Calculer $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat. **0,75**

3/ Discuter, suivant m, la continuité de f en -1. **0,75**

4/a- Vérifier que $\forall x < -3;\ f(x) = -2x + 9 - \dfrac{22}{x+3}$ **0,75**

b- Montrer que $\Delta : y = -2x + 9$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$. **0,5**

c- Etudier la position relative de C_f et Δ sur $]-\infty; -3[$ **0,5**

5/a- Vérifier que $\forall x \geqslant -1;\ f(x) - x = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} - m$ **0,5**

b- Déduire que $\Delta' : y = x - m$ est une asymptôte oblique à C_f au voisinage de $+\infty$. $\boxed{\mathbf{0,75}}$

Exercice 4 *(4 points)*

Soit ABC un triangle rectangle en A et de sens direct tel que

$\widehat{\left(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB}\right)} \equiv \dfrac{1999\pi}{3}\ [2\pi]$.

1/a) Montrer que la mesure principale de $\left(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB}\right)$ est $\dfrac{\pi}{3}$ **0,75**

b) faire une figure. **0,5**

2/ Désignons par I le milieu du segment [BC], J est le point d'intersection de la médiatrice de [AI] et celle de [BC].

a) Prouver que $\dfrac{\pi}{6}$ est la mesure principale de chacun des angles orientés $\left(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CJ}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CJ};\ \overrightarrow{CI}\right)$. **0,75**

b) Montrer alors que $\widehat{\left(\overrightarrow{JB};\overrightarrow{JA}\right)} \equiv \pi\ [2\pi]$. **1,00**

3/ Désignons par D le point d'intersection de (CJ) et $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Prouver que DBA est un triangle isocèle en D. $\boxed{\mathbf{1,00}}$

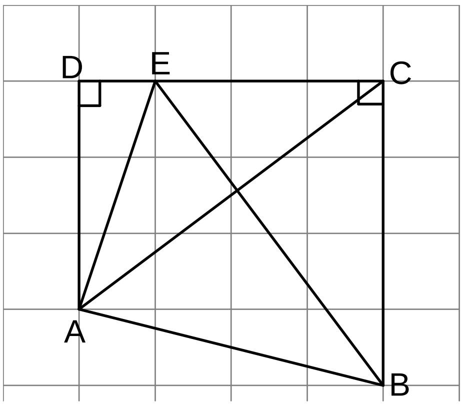
Exercice 5 *(4 points)*

Dans la figure ci-contre :

ABCD est un trapèze rectangle en C et D

DC=4; BC=4 et DA=3

$E \in [DC]$ tel que $DE = 1$



1/ Montrer que **0,5**

$\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}\right)\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$

2/a- Calculer $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$ **0,5**

b- En déduire que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = 9$ **0,25**

c- Calculer EA et EB puis $\cos\left(\widehat{AEB}\right)$. **0,75**

d- Montrer alors que $AB=\sqrt{17}$. **0,5**

e- Calculer $\cos\left(\widehat{ACB}\right)$. **0,5**

3/ On muni le plan P par le repère orthonormé $\left(D, \overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DE}\right)$ avec J le point défini par $\overrightarrow{DJ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA}$. Soit l'ensemble $(\Gamma) = \{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 6\}$

Montrer que (Γ) est un cercle dont on caracterisera. **1,00**

Feuille à remettre

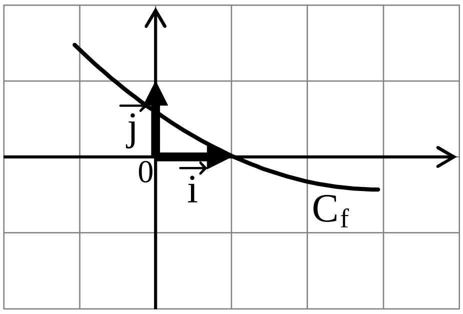
Nom :..**Prénom**:...**Classe**:..............

Exercice 1 ***(3 points)***

Remplir les cases par : Vrai - Faux

1/ La fonction $f: x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ est croissante et majorée sur IR^- $\boxed{}$ **0,5**

2/ Dans la figure ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f



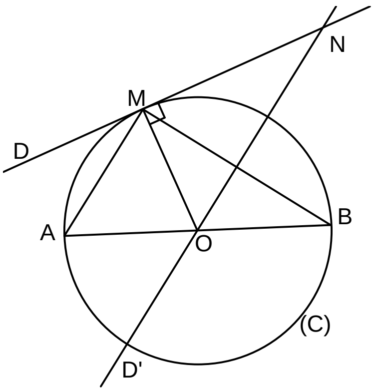
On $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ $\boxed{}$ **0,5**

3/ La fonction $f: x \mapsto \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ n'admet pas de limite en 2 $\boxed{}$

4/ A, B et C sont trois points distincts du plan P. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$ est une droite. $\boxed{}$ **0,5**

5/ Soit f une fonction de courbe C_f dans un repère orthonormé du plan.
Si f est définie sur IR alors sa courbe C_f n'admet aucune asymptote verticale. $\boxed{}$ **0,5**

6/



D est la tangente à (C) en M et D' la médiatrice de [MB].

On a : $\widehat{(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MB})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OB})}$ $[2\pi]$ $\boxed{}$ **0,5**

BON TRAVAIL

une correction du devoir de synthèse n:1

Exercice 1

1/	2/	3/	4/	5/	6/
Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Faux	Vrai

Exercice 2

1/ $D_f = IR\backslash\{1\}$

2/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

3/ f est continue sur son domaine de défintion sauf en 2.

4/ $f(]-\infty,1[) =]-\infty,+\infty[$.

5/ • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Rightarrow D : y = 1$ est l'asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow D' : x = 1$ est une asymptote verticale à C_f.

• $\Delta : y = ax + b$ est l'asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$.

Le point de coordonnées $(0,1)$ appartient à Δ donc $1=a\times0 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Le point de coordonnées $(-1,-1)$ appartient à Δ donc $-1=a\times(-1) + 1 \Leftrightarrow a = 2$

Conclusion : $\Delta : y = 2x + 1$.

Exercice 3

1/ f(x) existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -3$

Conclusion : le domaine de définition de f est $IR\backslash\{-3\}$.

2/ • $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{-2x^2 + 3x + 5}{x + 3} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-3^+} (-2x^2 + 3x + 5) = -22$

et $\lim\limits_{x\to-3^+} (x + 3) = 0$ et $x + 3 > 0$ pour tout x >-3.

• $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{-2x^2 + 3x + 5}{x + 3} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-3^+} (-2x^2 + 3x + 5) = -22$

et $\lim\limits_{x\to-3^-} (x + 3) = 0$ et $x + 3 < 0$ pour tout x <-3.

On a : la droite d'équation x=-3 est une asymptote verticale à C_f.

3/ • $f(-1) = \sqrt{(-1)^2 + 3} - m = 2 - m$.

• $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{-2x^2 + 3x + 5}{x + 3} = 0$.

• $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \left(\sqrt{x^2 + 3} - m\right) = 2 - m$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Par suite : Si $m = 2$ alors f est continue en -1.

Si $m \neq 2$ alors f est discontinue en -1.

4/a- $\forall x < -3;\ -2x + 9 - \dfrac{22}{x + 3} = \dfrac{(-2x + 9)(x + 3) - 22}{x + 3}$

$= \dfrac{(-2x + 9)(x + 3) - 22}{x + 3} = \dfrac{-2x^2 + 3x + 5}{x + 3} = f(x)$.

b- $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (-2x + 9)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-22}{x + 3} = 0$

$\Rightarrow \Delta : y = -2x + 9$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$.

c- $\forall x < -3;\ f(x) - (-2x + 9) = \dfrac{-22}{x + 3} > 0$

Donc C_f est au dessus de Δ sur $]-\infty;-3[$.

5/a- $\forall x \geqslant -1;\ f(x)-x = \sqrt{x^2+3} - m - x$

$$= \frac{\left[\sqrt{x^2+3}-x\right]\left[\sqrt{x^2+3}+x\right]}{\left[\sqrt{x^2+3}+x\right]} - m$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} - m.$$

b- $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(x-m)] = \lim\limits_{x\to+\infty} [(f(x)-x)+m]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} - m + m\right]$$

$$= 0.$$

Donc Δ':y=x − m est une asymptôte oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

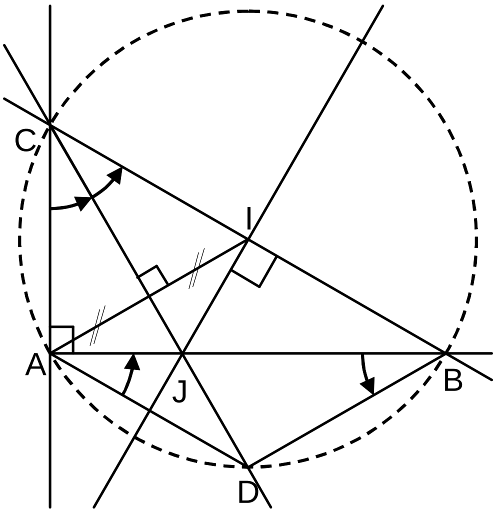
Exercice 4

1/a) $1999 = 666\times 3 + 1 \Rightarrow \dfrac{1999\pi}{3} = 333\times(2\pi) + \dfrac{\pi}{3}$

Donc $\widehat{\left(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Comme $\dfrac{\pi}{3} \in]-\pi,\pi]$ donc $\dfrac{\pi}{3}$ est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB}\right)$.

b)



2/a) (CJ) est la médiatrice du segment [AI] et C et J sont de part et d'autre de (AI) alors (CJ) est la bissectrice intérieure du secteur $\left[CA,\ CI\right]$

par suite $\widehat{\left(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CJ}\right)} \equiv \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CI}\right)[2\pi]$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{CJ};\ \overrightarrow{CI}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CJ}\right)}[2\pi]$

Alors $\widehat{\left(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CJ}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{CJ};\ \overrightarrow{CI}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$

Comme $\dfrac{\pi}{6} \in]-\pi,\pi]$ alors $\dfrac{\pi}{6}$ est la mesure principale de chacun des angles orientés $\left(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CJ}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CJ};\ \overrightarrow{CI}\right)$.

b) $\widehat{\left(\overrightarrow{JB};\overrightarrow{JA}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{JB};\overrightarrow{JC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{JC};\overrightarrow{JA}\right)}\ [2\pi]$

$$\equiv \pi - 2\widehat{\left(\overrightarrow{CJ};\ \overrightarrow{CB}\right)} + \pi - \left[\widehat{\left(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CJ}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AJ};\ \overrightarrow{AC}\right)}\right]\ [2\pi]$$

(car JB=JC)

$$\equiv \pi - 2\times\frac{\pi}{6} + \pi - \left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \pi\ [2\pi]$$

3/ • $\widehat{(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA})}\ [2\pi]$ car B et C sont dans $\overset{\frown}{DA}$.

$\equiv \widehat{(\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{CJ})} + \widehat{(\overrightarrow{CJ};\overrightarrow{CA})}\ [2\pi]$

$\equiv 0 + \frac{-\pi}{6}\ [2\pi]$

• $\widehat{(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB})}\ [2\pi]$ car A et C sont dans $\overset{\frown}{BD}$.

$\equiv \widehat{(\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{CB})} + \widehat{(\overrightarrow{CJ};\overrightarrow{CB})}\ [2\pi]$

$\equiv 0 + \frac{-\pi}{6}\ [2\pi]$

Par suite $\widehat{(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})}\ [2\pi]$ ce qui permet de dire que DAB est un triangle isocèle en D.

Exercice 5

1/ $(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA})(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$ car $\overrightarrow{ED}\perp\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{EC}$

2/a- $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC} = ED\times EC\times\cos\widehat{DEC} = 1\times 3\times\cos\pi = -3.$

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA'}.\overrightarrow{CB}$ avec A' est tel que $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{DA}$

Comme $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colineaires de même sens alors $\overrightarrow{CA'}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colineaires de même sens par suite $\widehat{A'CB} = 0.$

Ce qui donne $\overrightarrow{CA'}.\overrightarrow{CB} = CA'\times CB\times\cos 0 = 3\times 4\times 1 = 12.$

b- $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB} = -3+12 = 9.$

c- • $EA = \sqrt{DE^2+DA^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ car DAE est rectangle en D.

• $EB = \sqrt{CE^2+CB^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ car CEB est rectangle en C.

• $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = 9 \Leftrightarrow EA\times EB\times\cos(\widehat{AEB}) = 9 \Leftrightarrow \cos(\widehat{AEB}) = \frac{9}{5\sqrt{10}}.$

d- D'après El Keshi on a : $AB^2 = AE^2+EB^2-2EA\times EB\times\cos(\widehat{AEB})$

$= 10+25-2\times\sqrt{10}\times 5\times\frac{9}{5\sqrt{10}} = 17$

Par suite $AB=\sqrt{17}$.

d- D'après El Keshi on a : $AB^2 = AC^2+BC^2-2CA\times CB\times\cos(\widehat{ACB})$

donc $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\times CA\times CB} = \frac{5^2+4^2-\sqrt{17}^2}{2\times 5\times 4} = \frac{3}{5}$

3/ Dans le repère $(D,\overrightarrow{DJ},\overrightarrow{DE})$ on a $A(3,0)$ et $C(0,4)$.

$M(x,y)\in(\Gamma) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 6$

$\Leftrightarrow (3-x)(0-x)+(0-y)(4-y) = 6$

$\Leftrightarrow x^2-3x+y^2-4y = 6$

$\Leftrightarrow (x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+(y-2)^2-4 = 6$

$\Leftrightarrow (x-\frac{3}{2})^2+(y-2)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2.$

Conclusion : (Γ) est le cercle de centre le point de coordonnées $\left(\frac{3}{2},2\right)$ et de rayon $\frac{7}{2}$.